**TAFSIRAN TURUNAN SEBAGAI LAJU PERUBAHAN PADA SAINS ALAM DAN SOSIAL**

***Purwantini***
*Dosen Teknik Sipil Universitas 17 Agustus 1945 Semarang*

**ABSTRAK**

Gottfried Leibniz (1646-1716) menotasikan derivatif sebagai $\frac{dy}{dx}$. Derivatif yang dinotasikan sebagai $\frac{dy}{dx}$ dapat disebut sebagai laju perubahan. Penerapam laju perubahan dibidang ilmu pengetahuan, sebagai contoh adalah kecepatan dan percepatan pada bidang fisika, laju pertumbuhan pada bidang biologi dan keuntungan bersih pada bidang ekonomi.

**Kata kunci** : turunan, laju perubahan

## PENDAHULUAN

Gottfried Wilhelm Leibniz adalah seorang ahli matematika bangsa Jerman merupakan salah seorang dari dua penemu utama kalkulus, yang lainnya adalah Isaac Newton. Cara penulisannya (notasinya) untuk turunan masih dipakai secara luas, khususnya dalam bidang terapan, seperti misalnya pada fisika, kimia dan ekonomi.

Kecepatan suatu partikel adalah laju perubahan simpangan terhadap wakyu. Fisikawan yang tertarik pada laju perubahan lainnya, misalnya laju perubahan terhadap waktu yang disebut daya. Kimiawan yang mengkaji reaksi kimia tertarik pada laju perubahan konsentrasi reaktan terhadap waktu disebut laju reaksi. Pabrik baja tertarik pada laju perubahan biaya produksi $x$ ton baja per hari terhadap $m_c$ disebut biaya marginal. Biologiawan tertarik pada laju perubahan koloni bakteri terhadap waktu.

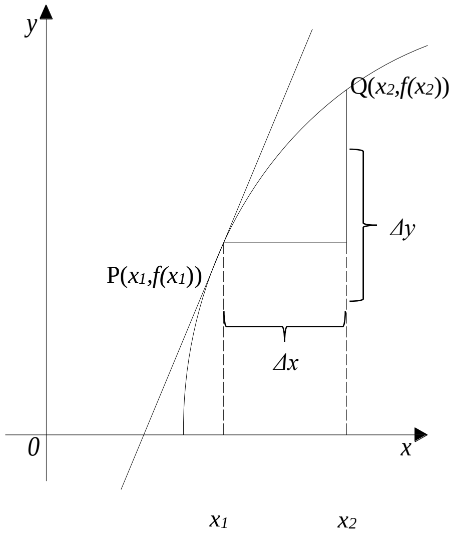
Turunan $\frac{dy}{dx}$ dapat ditafsirkan sebagai laju perubahan $y$ terhadap $x$. Jika $x$ berubah dari $x_1$ dan $x_2$ maka perubahan dalam $x$ adalah :

$\Delta x = x_1 - x_2$

Dan perubahan padanannya dalam $y$ adalah

$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

Hasil bagi selisih $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\,(x2)-f(x1)}{x2-x1}$ adalah perubahan rata-rata *y* terhadap *x*. Pada selang $[x_1,x_2]$ dan dapat ditafsirkan sebagai kemiringan tali busur PQ.




Gambar 1. Perubahan rata-rata Y terhadap X

$m_{PQ}$ = laju perubahan rata-rata

m = f' ($x_1$) = laju perubahan sesaat.

Limitnya ketika $\Delta x \rightarrow$ adalah turunan f' ($x_1$) yang dapat ditafsirkan sebagai laju perubahan sesaat *y* terhadap *x* atau kemiringan garis singgung di P($x_1$, f($x_1$)).

Dengan notasi Leibniz, proses tersebut dapat dituliskan dalam bentuk :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

Bilamana fungsi *y =f(x)* mempunyai tafsiran khas dalam salah satu sains, turunannya akan mempunyai tafsiran khas sebagai laju perubahan.

**PERUMUSAN MASALAH**

Laju perubahan yang dinotasikan sebagai $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\,(x2)-f\,(x1)}{x2-x1}$ disebut laju perubahan rata-rata sedangkan laju perubahan yang dinotasikan sebagai $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ disebut laju perubahan sesaat.

**PEMBAHASAN MASALAH**

Beberapa Tafsiran di Sains Alam dan Soal Fisika

Jika *s = f(t)* adalah posisi partikel yang bergerak sepanjang garis lurus maka $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ menyatakan kecepatan rata-rata pada periode waktu $\Delta t$ menyatakan kecepatan rata-rata pada periode waktu $\Delta t$ dan $v = \frac{ds}{dt}$ menyatakan kecepatan sesaat (laju perubahan simpangan terhadap waktu).

Ilustrasi

Sebuah pesawat terbang ke arah barat dengan kecepatan 500 kaki/detik pada ketinggian 4000 kaki. Pesawat itu terletak pada satu bidang tegak dengan sebuah lampu sorot di tanah. Jika lampu sorot terus diarahkan pada pesawat, dengan kecepatan beberapa lampu sorot itu berputar bila pesawat terbang ke arah timur lampu sorot pada jarik garis terbang 2000 kaki.

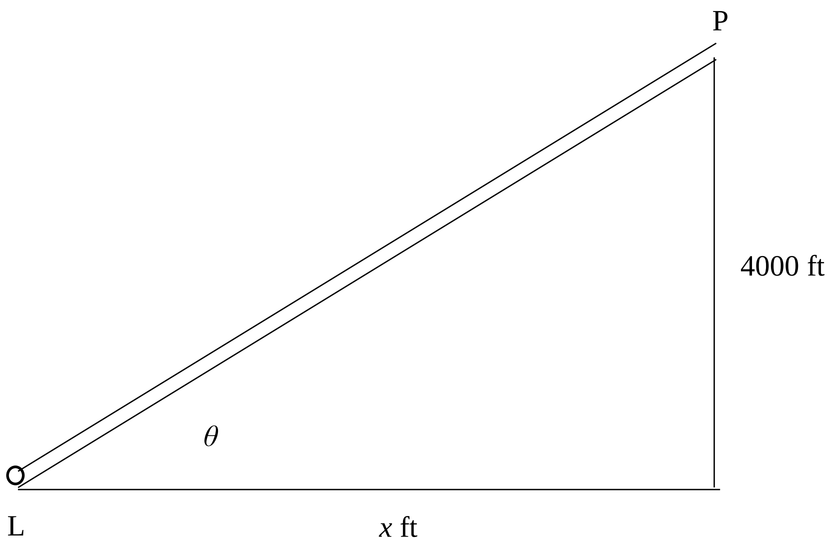
Penyelesaian

Lampu sorot berada di titik L dan pada suatu saat tertentu pesawat berada di titik P. Misalkan *t* menyatakan waktu dalam detik, *x* menyatakan jarak garis terbang ke arah timur dari lampu sorot dinyatakan dalam kaki pada saat *t* detik dan $\theta$ sudut elevasi pesawat dari lampu sorot dinyatakan dalam radian pada *t* detik.

Diketahui : $\frac{dx}{dt} = -500$

Ditanyakan : $\frac{d\theta}{dt}$, bila $x = 2000$

Jawab : $\tan \theta = \frac{4000}{x}$




Gambar 2. Sudut elevasi pesawat terbang

Kedua ruas dideferensikan terhadap *t*, maka diperoleh

$$\text{Sec}^2\,\theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{4000}{x^2}\frac{dx}{dt}$$

Substitusi $\frac{dx}{dt} = -500$ ke persamaan di atas, maka diperoleh

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{2.000.000}{x^2 \sec^2 \theta}$$

Bila $x = 2000$ maka $\tan\theta = 2$, karena $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ maka $\sec^2 \theta = 5$. Oleh karena itu

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2.000.000}{4.000.000\ (5)}$$

$$= \frac{1}{10}$$

Disimpulkan bahwa pada saat pengukuran sudut bertambah dengan kecepatan $\frac{1}{10}$ rad/detik dan dengan kecepatan inilah lampu sorot berputar.

**Kimia**

Suatu reaksi kimia menghasilkan pembentukan satu atau lebih zat (disebut hasil) dari satu atau lebih bahan kimia (disebut reaktan), misalnya :

Persamaan

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

menunjukkan bahwa dua molekul hidrogen dan satu molekul oksigen membentuk dua molekul air, maka reaksinya adalah

$$A+B \rightarrow C$$

Dengan A dan B adalah reaktan dan C adalah hasil.

**Biologi**

Misalkan $n = f(t)$ adalah banyaknya individu di dalam populasi hewan atau tanaman pada saat $t$. Perubahan ukuran populasi diantara waktu $t = t_1$ dan $t = t_2$ adalah

$\Delta n = f(t_2) - f(t_2)$, sehingga laju pertumbuhan rata-rata selama periode waktu $t_1 \leq t \leq t_2$ adalah laju pertumbuhan rata-rata = $\frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t2) - f(t1)}{t2 - t1}$

Laju pertumbuhan sesaat diperoleh dari laju pertumbuhan rata-rata dengan membiarkan periode waktu $\Delta t$ mendekati 0.

$$\text{Laju pertumbuhan} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{dn}{dt}$$

**Ekonomi**

Andaikan $C(x)$ adalah biaya total yang dikeluarkan sebuah perusahaan untuk menghasilkan $x$ satuan barang tertentu. Fungsi $C$ disebut fungsi biaya, jika banyaknya barang yang dihasilkan bertambah dari $x_1$ menjadi $x_2$, biaya tambahan adalah $\Delta C = C(x_2) - C(x_2)$ dan laju perubahan rata-rata biaya adalah

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x2) - C(x1)}{x2 - x1} = \frac{C(x1 + \Delta x) - C(x1)}{\Delta x}$$

Limit besaran ini ketika $\Delta x \to 0$, yakni laju perubahan sesaat biaya terhadap banyaknya barang yang dihasilkan, oleh para ekonom disebut biaya marginal.

$$\text{Biaya marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

Karena $x$ biasanya hanya berupa bilangan bulat, tidak ada maknanya untuk membiarkan $\Delta x$ mendekati 0, tetapi kita selalu dapat menggantikan $C(x)$ dengan suatu fungsi pengganti mulus.

Dengan mengambil $\Delta x = 1$ dan $n$ besar (sehingga $\Delta x$ kecil dibandingkan terhadap n), diperoleh:

$$C'(n) = C(n+1) - C(n)$$

Jadi biaya marginal dari memproduksi $n$ satuan kira-kira sama dengan biaya memproduksi satu satuan lebih (satuan ke-($n+1$)).

Seringkali fungsi biaya dinyatakan dengan suatu polinom.

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Dengan *a* menyatakan harga *"overhead"* (sewa, pemanasan, perawatan) dan suku lainnya menyatakan biaya bahan baku, buruh dan sebagainya.

Biaya bahan baku boleh jadi sebanding terhadap *x*, tetapi biaya buruh boleh jadi sebagian tergantung dari pangkat *x*, dikarenakan oleh biaya lembur dan ketidakefisienan dalam operasi sekala besar.

## KESIMPULAN

Kecepatan, kepadatan, arus, daya dan gradien suhu dalam fisika, laju reaksi dan kemampatan dalam kimia, laju pertumbuhan dan gradien kecepatan darah dalam biologi, biaya marginal dan keuntungan marginal dalam ekonomi, laju aliran panas dalam geologi, laju perbaikan untuk kerja dalam psikologi, laju penyebaran desas-desus dalam sosiologi. Hal ini merupakan kasus khas dari konsep matematika, yaitu turunan.

Ini adalah ilustrasi fakta bahwa bagian dari kekuatan matematika terletak pada keabstrakannya. Sebuah konsep matematika tunggal abstrak (seperti halnya turunan) dapat mempunyai tafsiran berbeda di masing-masing sains.

## DAFTAR PUSTAKA


Bradley, G.L. and smith, K.J. 1995. *Calculus*. Prentice – Hall, New Jersey.

Leithold, L., 1992, *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik (terjemahan)*, Edisi Kelima, Jilid I, Penerbit Erlangga, Jakarta.

Purcell, E.J. and Varberg, D., 1992, *Kalkulus dan Geometri Analitis (terjemahan)*, Edisi Kelima, Jilid I, Penerbit Erlangga.

Purwantini,. 1988, *Pengantar Fungsi Terintegral*, FMIPA Undip.

Salas, S.L. And Hille, E.1990. *Calculus*. John Wiley and Sons, New York.

Stewart, J., 1998, *Kalkulus (terjemahan)*, Edisi Keempat, Jilid 1, Penerbit Erlangga, Jakarta.