PERSAMAAN DIFFERENSIAL ORDER SATU
PADA MODEL MATEMATIKA

Purwantini
Dosen Teknik Sipil Universitas 17 Agustus 1945 Semarang

ABSTRAK

Persamaan Differensia; Order satu dengan variabel yang dapat dipisahkan digunakan unuk Model Matematika. Contohnya : Hukum Pendinginan Newton dan Hukum Torricelli.

Kata kunci : persamaan, differensial, order satu

PENDAHULUAN

Persamaa Differensial adalah persamaan yang mengandung turunan-turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui, dinotasikan sebagai y(x) dan yang akan ditentukan dari persamaan tersebut.

Sebagai contoh, jika laju perubahan suatu populasi (manusia, hewan, bakteri dan sebagainya) dinotasikan sebagai $y^1 = \frac{dy}{dx}$, dengan x = waktu, sama dengan populasi $y(x)$ maka model tersebut adalah $y^1 = y$ merupakan bentuk persamaan differensial. Jika $y = e^x$ atau secara umum $y = ce^x$ maka persamaan differensialnya $y^1 = y$, berarti sudah diperoleh penyelesaian masalahnya.

PERUMUSAN MASALAH

Menurut Hukum Pendinginan Newton bahwa laju perubahan suhu bola T yang dicelupkan pada suhu medium A sebanding dengan persamaan antara T dengan suhu medium A, sedemikian hingga :

$\frac{dY}{dt} = k$ (A – T), dengan k > 0

Menurut Hukum Torricelli bahwa kecepatan aliran air melalui mulut tangki adalah : $v = \sqrt{2gh}$, dengan g = 980 cm/det^2 merupakan kecepatan gravitasi pada permukaan bumi dan h merupakan tinggi air di atas mulut tangki saat itu. Syarat yang nyata dinotasikan sebagai :

$v = 0,6\sqrt{2\,gh}$

Faktor 0,6 diberikan karena irisan melintang dari aliran air lebih kecil dari mulut tangki.

PEMBAHASAN MASALAH

Hukum Pendinginan Newton

Sebuah bola tembaga dipanaskan sampai suhu $100^{o}C$. Kemudian pada sat t = 0, bola tersebut direndam air yang bersuhu tetap $30^{o}C$. Setelah 3 menit ternyata suhu bola menjadi $70^{o}C$. Tentukan saat ketika suhu bola menjadi $31^{o}C$.

Informasi Fisis

Percobaan menunjukkan bahwa lajuperubahan suhu bola T sebanding dengan perbedaan antara T dengan suhu medium (Hukum Pendinginan Newton). Percobaan juga menunjukkan bahwa aliran panas dalam bola demikian cepat, sehingga setiap saat suhu dianggap sama di seluruh bagian bola.

Penyelesaian

1. Langkah Pertama dengan membentuk Model Matematis. Bentuk matematis dari Pendinginan Newton adalah :

   $\frac{dT}{dt} = -k\,(T-30),\ k > 0$

2. Langkah Kedua dengan penyelasaian umum :

   $\frac{dT}{dt} = +kT = 30k$

   $(D + k)T = 30k$, dengan $\frac{d}{dT} = D$

   Persamaan Karakteristik :

   $m + k = 0$

   $m = -k$

   Penyelesaian Karakteristik

   $T_c = Ce^{-kt}$

   Penyelesaian Partikulir

   Misalkan : $T_p = A_0$

   $T' = 0$

   $T' + kT = 30k$

   $0 + k\,A_0 = 30k$

   Jadi, $T_p = 30$

   Penyelesaian Umum Persamaan Differensial adalah :

   $T = Tc + Tp$

   $T(t) = Ce^{-kt} + 30.$

3. Langkah Ketiga dengan menggunakan kondisi awal, dimana kondisi awal yang diberikan adalah T(0) = 100.

   Penyelesaian khusus yang memenuhi syarat ini adalah :

   $T(t) = Ce^{-kt} + 30$

   $T(0) = Ce^{0} + 30$

   $100 = C + 30$

   $C = 70$

   Jadi $T(t)$ $70e^{-kt} + 30$.

4. Langkah Keempat dengan menggunakan informasi selanjutnya, konstanta k dapat ditentukan dari informasi T(3) = 70.

   $T(3) = 70e^{-3k} + 30$

   $70 = 70e^{-kt} + 30$

   $70e^{-kt} = 40$

   $e^{-3k} = \frac{4}{7}$

   $\text{In } e^{-3k} = \text{In } \frac{4}{7}$

   $-3k = -(\text{In } 7 - \text{In } 4)$

   $k = 0{,}1865$

   Dengan menggunakan nilaik k ini, maka temperatur bola T(t) adalah :

   $T(t) = 70\, e^{-0{,}1865} + 30$

   Untuk nilai $T = 31^{o}$C dicapai bila :

   $31 = 70\, e^{-0{,}1865\, t} + 30$

   $70\, e^{-0{,}1865\, t} = 1$

   $e^{-0{,}1865\, t} = \frac{1}{70}$

   $\text{In } e^{-0{,}1865\, t} = \text{In } \frac{1}{70}$

   $-0{,}1865 = \text{In } 1 - \text{In } 70$

   $t = \frac{In\ 70}{0{,}1865} = 22{,}78 \approx 23$

   Jadi saat ketika suhu bola menjadi 31^{o}C adalah setelah mendekati 23 menit.

ALIRAN AIR MELALUI MULUT TANGKI (HUKUM TORRICELLI)

Sebuah tangki berbentuk silinder dengan dasar tertutup, tinggi 1,5 meter dan garis tengah 1 meter, mula-mula penuh berisi air. Dasarnya terdapat lubang bergaris tengah 1 cm, yang terbuka beberapa saat sehingga air mulai mengalir keluar karena gravitasi. Tentukan tinggi air *h(t)* dalam tangki tersebut pada saat t. Tentukan saatnya ketika tangki tersebut setengah penuh, seperempat penuh dan kosong.

Penyelesaian

Volume air yang mengalir keluar selama selang waktu singkat Δt adalah :

$\Delta V = A\ v\ \Delta t$, dengan $A = \pi\ r^2\ cm^2$

$A = (0{,}5)^2 \pi\ cm^2$ dan v = kecepatan aliran air

Menurut Hukum Torricelli bahwa : kecepatan aliran air melalui mulut tangki adalah :

$v = 0{,}6\sqrt{2\ gh}$, dengan g = 980 cm/det^2

h = tinggi air di atas mukut tangki

ΔV harus sama dengan volume ΔV^* dari air dalam tangki

$\Delta V^* = -B\Delta h$, dengan B luas penampang lintang tangki

$\Delta\ h$ pengurangan ketinggian $h(t)$ dari permukaan air.

Tanda negatif muncul karena volume air dalam tangki berkurang

Karena $\Delta V = \Delta V^*$, maka :

$A\ v\ \Delta t = -B\Delta h$

$0{,}6A\ \sqrt{2\ gh}\ \Delta t = -B\Delta h$

$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -\ \frac{0{,}6\ \sqrt{2\ gh}}{B}$

Untuk $\Delta t \rightarrow 0$, diperoleh Persamaan differensial :

$\frac{dh}{dt} = -\ \frac{0{,}6\ A\ \sqrt{2\ g}}{B}\sqrt{h}$

$\frac{dh}{dt} = -\ \frac{(0{,}6)(0{,}5)^2 \pi\ A\ \sqrt{2\ .\ 980}}{(50)^2 \pi}\sqrt{h}$

$= -0{,}00266\ \sqrt{h}$

Kondisi awalnya adalah :

$h(0)$ = 150 cm, dengan $t = 0$ merupakan saat awal lubang terbuka

$h^{1/2} dh = -0{,}00266\ dt$

$\int h^{-1/2} dh = \int -0{,}00266\ dt$

$\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} h^{-1/2+1} = -0{,}00266\ t + C$

$2\ h^{1/2} = -0{,}00266\ t + C$

$h^{1/2} = -\ 0{,}00133\ t + \frac{C}{2}$

$h^{1/2} = -0{,}00133\ t + k$

$h = (-0{,}00133\ t + k)^2$

$h(t) = (\ k - 0{,}00133\ t)^2$

Dengan kondisi awal $h(0) = 150$ maka :

$h(0) = k^2$

$\rightarrow\ k^2 = 150\ \rightarrow\ k = 12{,}25$

$h(0) = 150$

Jadi $h(t) = (12{,}25 - 0{,}00133t)^2$

$\sqrt{h}$ = 12,25 – 0,00133 t

0,00133 t = 12,25 – $\sqrt{h}$

$t = \frac{12{,}25 - \sqrt{75}}{0{,}00133}$

= 2,70 . 10^3 detik

= 45 menit

Tangki seperempat penuh pada saat :

$t = \frac{12{,}25 - \sqrt{37{,}5}}{0{,}00133}$

= 76,8 menit

Tangki kosong pada saat :

$t = \frac{12{,}25 - \sqrt{0}}{0{,}0133}$

= 154 menit

KESIMPULAN

Suatu hukum fisis melibatkan laju perubahan suatu fungsi seperti kecepatan, percepatan dan sebagainya. Hal ini akan menuju kebentuk persamaan differensial.

DAFTAR PUSTAKA

Bradley, G.L. and smith, K.J. 1995. *Calculus*. Prentice – Hall, New Jersey.

Edwards, J.R., C.H. and Penney, D.E. 1993. *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*. Third Edition. Prentice – Hall, New Jersey.

Kreiszig, E. 1991. *Matematika Teknik Lanjutan (terjemahan)*. Edisi Keenam, Jilid 1. Penerbit Erlangga.

Purwantini,.2014, *TafsiranTurunanSebagaiLajuPerubahanPadaSainsAlamdanSosial*, JurnalTeknikSipil, Volume 7, Untag Semarang.

Salas, S.L. And Hille, E.1990. *Calculus*. John Wiley and Sons, New York.